Modelo Cinemático Estándar para la Simulación de Vuelo

NASA CR2497
Richard E. McFarland

Preparado por:
COMPUTER SCIENCES CORPORATION
Mountain View, Calif.
Para el Ames Research Center
NASA Washington D.C. Enero 1975

Traducido al castellano por:
Israel Barrientos.
Monterrey México
Agosto 2001

Lista de Simbolos

t	Longitud del vehiculo (rad)
t_I	Longitud del vehiculo sobre una Tierra que no rota (rad)
w_e	Velocidad angular de la Tierra (7.2685x10^{-3} rad/s)
t	Tiempo transcurrido desde el inicio del programa (s)
X_E, Y_E, Z_E	Trio del Marco Tierra (inercial)
l	Latitud del vehiculo (rad)
X_L, Y_L, Z_L	Trio del Marco Local. El vehiculo permance en el eje Z_L
T_{E2L}	Matriz de transformacion, lease Tierra a Local
Ω_L	Tensor de primer orden (Apendice B). Consiste de elementos de las velocidades angulares del Marco Local.
p_L, q_L, r_L	Velocidades angulares del Marco Local, al rededor de sus ejes X_L, Y_L y Z_L , respectivamente (rad)
R_e	Radio de la Tierra (20 898 908 pies $\approx$ 6369987 m)
T_{L2E}	Las transformaciones son ortogonales, por tanto, $T_{L2E=}T_{E2L}{}^{-1}$, lease Local a Tierra
R	Distancia del centro de la Tierra al vehiculo. (ft, m)
V_N, V_E, V_D	Componentes del vector de velocidad inercial total, transformados al Marco Local, lease Norte, Este, Abajo (ft/s, m/s)
F_N, F_E, F_D	Componentes del vector de fuerzas aplicadas al centro de gravedad del vehiculo en el espacio del Marco Local (lb, kg)
F_G	Fuerza de Gravedad (lb, kg)
T_{L2B}	Matriz de transformacion, lease Local a Cuerpo.

y, q, f	Angulos de Euler (Apendice C) que relacionan a los Marcos Local y de Cuerpo (rad)
F_{TX}, F_{TY}, F_{TZ}	Vector de fuerza aplicada en el Marco de Cuerpo (lb, kg)
m	Masa del vehiculo (slugs)
V_{EE}	Velocidad del vehiculo hacia el este sobre la superficie de la Tierra. Para un objeto estacionario sobre el piso, esto corresponde a cero (ft/s, m/s)
V_{NR}, V_{ER}, V_{DR}	Componentes de la velocidad relativa con respecto a la masa de aire, en el Marco Local (ft/s, m/s)
V_{NW}, V_{EW}, V_{DW}	Componentes de la velocidad de la masa de aire en el Marco Local (ft/s, m/s)
$U_{TURB}, etc.$	Turbulencia aleatoria (media cero) introducida en el Marco de Cuerpo (ft/s, m/s)
U_B, V_B, W_B	Componentes del vector de velocidad aerodinámica en el Marco Cuerpo (ft/s)
V_{RW}	Magnitud de la velocidad aerodinámica (ft/s, m/s)
V_T	Magnitud de la velocidad total con respecto a la superficie de la Tierra (ft/s, m/s)
V_G	Velocidad sobre la Tierra (ft/s, m/s)
I_{ij}	Momentos de Inercia (slug-ft^2, kg-m^2)
L_T, M_T, N_T	Vector de Torque (par) total en el Marco Cuerpo alrededor de los ejes X_B, Y_B, Z_B
p_B, q_B, r_B	Velocidades angulares del Marco Cuerpo alrededor de sus ejes X_B, Y_B, Z_B respectivamente (rad/s)
p_{LB}, q_{LB}, r_{LB}	Velocidades angulares del Marco Local (pqr,) referidas al Marco Cuerpo (rad/s)
p_T, q_T, r_T	Vector de velocidades angulares relativas entre el Marco Local y el Marco Cuerpo (rad/s)

a	Angulo de ataque (rad)
b	Angulo de deslizamiento lateral (rad)
g_H	Angulo horizontal de la ruta de vuelo medido en el sentido del reloj desde el Norte azimutal (rad)
g_V	Angulo de la ruta de vuelo (rad)
a	Velocidad del sonido en altitud (ft/s, m/s)
r	Densidad del aire en altitud (slug/ft^3, kg/m^3)
r_0	Densidad del aire al nivel del mar (slug/ft^3, kg/m^3)
V_{eq}	Velocidad del aire equivalente (nudos, m/s)
a_X, a_Y, a_Z	Componentes de aceleración inercial del c. de g. En el marco Cuerpo (ft/s^2, m/s^2)
Ω_B	Tensor de velocidades angulares del Marco Cuerpo (Apéndice B)
h_R	Altitud de la Pista (ft, m)
R_R	Altitud de la Pista mas del radio de la Tierra (ft, m)
t_R	Longitud Geográfica de la Pista (rad)
l_R	Latitud Geográfica de la Pista (rad)
h_{CG}	Altura del c. de g. del Vehículo sobre la Pista (ft, m)
$\Delta N_R, \Delta E_R$	Posición del Vehículo al Norte y al Este de la cabecera de la Pista (ft, m)
X_{CG}, Y_{CG}	Desplazamiento horizontal del c. de g. del Vehículo hacia el final de la Pista, y hacia su derecha (ft, m)
q_R	Dirección de la Pista medida desde el Norte (rad)
F_{AX}, F_{AY}, F_{AZ}	Fuerzas aerodinámicas en el Marco Cuerpo (lb, kg)

F_{EX}, F_{EY}, F_{EZ} Fuerzas debidas a los motores en el Marco Cuerpo (lb, kg)

F_{GX}, F_{GY}, F_{GZ} Fuerzas de reacción del tren de aterrizaje en el Marco Cuerpo (lb, kg)

L_A, M_A, N_A Torques (pares) aerodinámicos alrededor de los ejes del Marco Cuerpo (lb-ft, kg-m)

L_E, M_E, N_E Torques (pares) debidos a los motores alrededor de los ejes del Marco Cuerpo (lb-ft, kg-m)

L_G, M_G, N_G Torques (pares) de reacción del tren de aterrizaje alrededor de los ejes del Marco Cuerpo (lb-ft, kg-m)

$p_{TURB}, etc.$ Turbulencia angular aleatoria con una media igual a cero (rad/s)

$p_{BwN}, etc.$ P_B (etc.) con la inclusión de la turbulencia angular aleatoria (rad/s)

1.- En el presente material todos los sistemas coordenados son tríos ortogonales del tipo mano derecha.

2.- Relaciones entre los Marcos de Referencia de Tierra (E) y Local (L)

El marco de referencia de Tierra (E) es el marco principal para el desarrollo de las relaciones matemáticas utilizadas aquí, dado que sin tomar en cuenta las consideraciones extraterrestres, ni rota ni se traslada.
Sin embargo no es un marco especialmente interesante desde el punto de vista de la simulación de aeronaves, y ninguna cantidad relacionada con este marco aparece explícitamente en ninguna de las ecuaciones finales.

El marco de referencia Tierra es un marco inercial con el origen de sus coordenadas en el centro de la tierra, (esférica). El eje Z_E interseca al Polo Norte, y el eje X_E interseca a la línea de longitud cero grados (Greenwich) en el tiempo cero.

El marco de referencia Local esta situado en la superficie de la tierra directamente bajo el vehículo. Su eje X_L apunta hacia el Norte y su eje Y_L apunta hacia el Este, ambos son paralelos a la superficie de la tierra. El eje Z_L apunta hacia el centro de la Tierra. Este no es un marco inercial, dado que sigue al movimiento de la aeronave. Su distancia al centro de la Tierra (R_e) siempre es constante.

Los marcos de referencia E y L están relacionados a través de los ángulos inerciales de longitud (τ_I) y latitud (λ) como se muestra en la Figura 1. Dado que la Tierra rota alrededor del eje Z_E con una velocidad angular ω_E, la longitud τ de un vehículo diferirá del ángulo de longitud inercial τ_I en función del tiempo transcurrido.

$$t + t_I - w_e t \tag{2.1}$$

La latitud inercial no difiere de aquella de una Tierra en rotación.

Figura 1.
Descripción de los Sistema de Ejes E y L.

La transformación del marco de referencia Tierra al marco de referencia Local (vease el apéndice A para la derivación) esta determinada por

$$[T_{E2L}] = \begin{bmatrix} -SlCt_I & -SlSt_I & Cl \\ -St_I & Ct_I & 0 \\ -ClCt_I & -ClSt_I & -Sl \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

donde las funciones trigonométricas “seno” y “coseno” son abreviadas con “S” y “C” de aquí en delante.

Dado que el marco de referencia L esta siempre bajo la aeronave y sobre la superficie de la Tierra, el centro del marco L esta a una distancia R_e (6369987.16 metros) del centro del marco E el cual esta localizado en el centro de la Tierra. El eje Z_L siempre apunta hacia abajo (perpendicular a la superficie de una Tierra esférica).

Siempre que la aeronave se traslade sobre la superficie de la Tierra, ocurre una rotación relativa entre los marcos E y L. La cual se puede representar por las velocidades angulares instantáneas (p_L, q_L, r_L) del marco L mismo (X_L, Y_L, Z_L)

En el apéndice B se desarrolla el operador Omega cruz [Ω_L], y dos identidades que relacionan a una matriz de transformación con sus derivadas en términos de este operador.

$$[\Omega_L] = \begin{bmatrix} 0 & -r_L & q_L \\ -r_I & 0 & -p_L \\ -q_L & p_L & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} [\dot{T}_{E2L}] &= -[\Omega_L][T_{E2L}] \\ [\dot{T}_{L2E}] &= [T_{L2E}][\Omega_L] \end{aligned} \tag{2.4}$$

La segunda derivada se determina como sigue:

$$[\ddot{T}_{E2L}] = \{[\Omega_L]^2 - [\dot{\Omega}_L]\}[T_{E2L}] \tag{2.5}$$

donde:

$$[\dot{\Omega}_L] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{r}_L & \dot{q}_L \\ -\dot{r}_I & 0 & -\dot{p}_L \\ -\dot{q}_L & \dot{p}_L & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

y:

$$[\Omega_L]^2 = \begin{bmatrix} -r_L^{\ 2} - q_L^{\ 2} & p_L q_L & r_L p_L \\ p_I q_I & -r_I^{\ 2} - p_I^{\ 2} & r_L q_L \\ p_L r_L & q_L r_L & -q_L^{\ 2} - p_L^{\ 2} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Del apéndice A, las velocidades angulares instantáneas alrededor de los ejes del marco L pueden relacionarse a la velocidad de translación de la aeronave sobre la superficie de la Tierra a través de:

$$\begin{bmatrix} p_L \\ q_L \\ r_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{t}_I Cos\, l \\ -\dot{l} \\ -\dot{t}_I Sen\, l \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Este vector introduce el efecto Coriolis en el modelo, y dado que su influencia es proporcional a la velocidad, es comprensiblemente infinitesimal para la mayoría de las aplicaciones, pero surgirían problemas de navegación grandes si se elimina para aeronaves suficientemente rápidas.

El vector de posición inercial (Marco E) esta relacionado al vector de posición en el marco Local por:

$$\begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix} = [T_{L2E}] \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L - R_e \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

donde Z_L es el negativo de la altitud h. Tomando en cuenta el hecho de que R_e es una constante, el vector de velocidad inercial es la derivada de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{X}_E \\ \dot{Y}_E \\ \dot{Z}_E \end{bmatrix} &= [\dot{T}_{L2E}] \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L - R_e \end{bmatrix} + [T_{L2E}] \begin{bmatrix} \dot{X}_L \\ \dot{Y}_L \\ \dot{Z}_L \end{bmatrix} \\ &= [T_{L2E}] \left\{ \begin{bmatrix} \dot{X}_L \\ \dot{Y}_L \\ \dot{Z}_L \end{bmatrix} + [\Omega_L] \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L - R_e \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sin embargo, en el marco L, no hay movimiento a lo largo de los ejes coordenados, solo a lo largo del eje Z_L $\left(\dot{X}_L = \dot{Y}_L = 0\right)$. Definamos:

$$R = R_e - Z_L = R_e + h \tag{2.11}$$

El vector de velocidad inercial (transformado al marco Local instantáneo) es:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = [T_{E2L}] \begin{bmatrix} \dot{X}_E \\ \dot{Y}_E \\ \dot{Z}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{R} \end{bmatrix} + [\Omega_L] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

el cual, utilizando (2.3) y (2.8) es también:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Rq_L \\ Rp_L \\ -\dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\dot{l} \\ R\dot{t}_I Cos\, l \\ -\dot{R} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

A partir de estos elementos, (2.8) se puede rescribir como:

$$\begin{bmatrix} p_L \\ q_L \\ r_L \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} V_E \\ -V_N \\ -V_E Tan\, l \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

El factor de radio inverso reitera el argumento de que este vector es generalmente de muy pequeña magnitud.

El vector de aceleración inercial es la derivada con respecto al tiempo del vector de velocidad inercial (2.10)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{X}_E \\ \ddot{Y}_E \\ \ddot{Z}_E \end{bmatrix} &= [\ddot{T}_{L2E}] \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L - R_e \end{bmatrix} + 2[\dot{T}_{L2E}] \begin{bmatrix} \dot{X}_L \\ \dot{Y}_L \\ \dot{Z}_L \end{bmatrix} + [T_{L2E}] \begin{bmatrix} \ddot{X}_L \\ \ddot{Y}_L \\ \ddot{Z}_L \end{bmatrix} \\ &= [T_{L2E}] \left\{ \begin{bmatrix} \ddot{X}_L \\ \ddot{Y}_L \\ \ddot{Z}_L \end{bmatrix} + 2[\Omega_L] \begin{bmatrix} \dot{X}_L \\ \dot{Y}_L \\ \dot{Z}_L \end{bmatrix} + \{[\Omega_L]^2 + [\dot{\Omega}_L]\} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L - R_e \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

y de nuevo, dado que solo hay movimiento en el eje Z_L , tenemos:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_E \\ \ddot{Y}_E \\ \ddot{Z}_E \end{bmatrix} = [T_{L2E}] \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{R} \end{bmatrix} + 2[\Omega_L] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{R} \end{bmatrix} + \{[\Omega_L]^2 + [\dot{\Omega}_L]\} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix} \right\} \tag{2.16}$$

Este es el vector de aceleración inercial, y como tal, puede ser transformado al Marco Local e igualado al vector de aceleración total (consideradas ambas fuerzas, las aplicadas y las de campo).

$$[T_{E2L}] \begin{bmatrix} \ddot{X}_E \\ \ddot{Y}_E \\ \ddot{Z}_E \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_N \\ F_E \\ F_D \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_G \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

donde la fuerza de gravedad se relaciona con el peso W al nivel del mar o la aceleración gravitacional g_o a través de:

$$F_G = W\left(\frac{R_e}{R}\right)^2 = mg_o\left(\frac{R_e}{R}\right)^2 \tag{2.18}$$

3.0 Relaciones entre los Marcos de Referencia Local (L) y de Cuerpo (B)

El Marco de referencia de Cuerpo utiliza la notación convencional de aeronaves: El eje X_B pasa a través de la nariz del vehículo, el eje Y_B apunta hacia el ala derecha, y el eje Z_B atraviesa la parte inferior del vehículo. El origen del marco de referencia de Cuerpo esta localizado en el centro de gravedad del vehículo.

La matriz de transformación del Marco L al marco B (T_{L2B}) es una matriz identidad siempre que la aeronave este paralela a la superficie de la Tierra y apuntando al Norte. Del apéndice C tenemos:

$$[T_{L2B}] = \begin{bmatrix} CqCy & CqSy & -Sq \\ SfSqCy - CfSy & SfSqSy + CfCy & SfCq \\ CfSqCy + SfSy & CfSqSy - SfCy & CfCq \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Las fuerzas aplicadas en el Marco B, pueden ser representadas en el Marco L a través de la relación inversa (o la transpuesta, dado que son idénticas):

$$\begin{bmatrix} F_N \\ F_E \\ F_D \end{bmatrix} = [T_{L2E}]^{-1} \begin{bmatrix} F_{TX} \\ F_{TY} \\ F_{TZ} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Y con la adición de la fuerza de campo (la debida a la gravedad), esto es proporcional al vector de aceleración inercial (2.16) , transformado al Marco L (vea (2.14) y (2.17)).

$$\frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_N \\ F_E \\ F_D + F_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2q_L\dot{R} - r_L p_L R - \dot{q}_L R \\ 2p_L\dot{R} - r_L q_L R + \dot{p}_L R \\ -\ddot{R} + (q_L{}^2 + p_L{}^2)R \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

La derivada de algunos componentes de (2.14) con las substituciones de (2.13),

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_L \\ \dot{q}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{R}\begin{bmatrix} \dot{V}_E + V_D p_L \\ -\dot{V}_N + V_D q_L \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

cuando se substituye en (3.3), produce el vector de fuerza en el Marco Local. Esto ilustra las contribuciones debidas a las aceleraciones de Coriolis, y las centrípetas, así como las fuerzas aplicadas y las de campo.

$$\frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_N \\ F_E \\ F_D + F_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_L V_D - r_L p_L R + \dot{V}_N \\ -p_L V_D - r_L q_L R + \dot{V}_E \\ (q_L{}^2 + p_L{}^2)R + \dot{V}_D \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Con substituciones a partir de la ecuación (2.14), esta ecuación se utiliza para obtener las derivadas con respecto al tiempo del vector de velocidad inercial transformado al Marco Local Instantáneo:

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} \dot{V}_N \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_D \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_N \\ F_E \\ F_D + F_G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -q_L V_D + r_L p_L R \\ p_L V_D + r_L q_L R \\ -(q_L{}^2 + p_L{}^2)R \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{V}_N \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_D \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} F_N \\ F_E \\ F_D + F_G \end{bmatrix} + \frac{1}{R}\begin{bmatrix} V_N V_D - V_E{}^2 Tan\, l \\ V_E V_D + V_N V_E Tan\, l \\ -(V_N{}^2 + V_E{}^2) \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{3.6}$$

Estas aceleraciones se integran para formar el vector de velocidad en el Marco Local, y esta integración incluye los efectos de ambas rotaciones, las de la Tierra y las producidas por la traslación del Vehículo.

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{V}_N \\ \dot{V}_E \\ \dot{V}_D \end{bmatrix} dt \tag{3.7}$$

Se puede utilizar el algoritmo de segundo orden Adams-Bashforth. La velocidad del vehículo sobre la superficie de la tierra es como se muestra arriba, menos la contribución de la rotación de la Tierra (ω_e) sobre el eje Z_e . La velocidad del vehículo en el Marco Local con respecto a la superficie de la Tierra es:

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix} V_N \\ V_{EE} \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_{EE} \\ V_D \end{bmatrix} - w_e \begin{bmatrix} 0 & Sen\, l & 0 \\ -Sen\, l & 0 & -Cos\, l \\ 0 & Cos\, l & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_N \\ V_{EE} \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_N \\ V_{EE} \\ V_D \end{bmatrix} - w_e R Cos\, l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{3.8}$$

Solo se modifica la velocidad hacia el Este.

El vector de viento total se modela como una variable aleatoria, con ambas, una tendencia y una componente aleatoria representadas por:

$$\begin{bmatrix} V_{TWN} \\ V_{TWE} \\ V_{TWD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{NW} \\ V_{EW} \\ V_{DW} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{NTURB} \\ V_{ETURB} \\ V_{DTURB} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

y las porciones aleatorias se originan en el Marco Cuerpo, como en:

$$\begin{bmatrix} V_{NTURB} \\ V_{ETURB} \\ V_{DTURB} \end{bmatrix} = [T_{B2L}] \begin{bmatrix} U_{TURB} \\ V_{TURB} \\ W_{TURB} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

El vector de velocidad aerodinámico es entonces la diferencia entre la velocidad del vehículo con respecto a la superficie de la tierra y la velocidad total de la masa de aire con respecto a la superficie de la Tierra.

$$\begin{bmatrix} V_{NR} \\ V_{ER} \\ V_{DR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{N} \\ V_{EE} \\ V_{D} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{TWN} \\ V_{TWE} \\ V_{TWD} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

En el Marco Cuerpo esto se expresa como:

$$\begin{bmatrix} U_{B} \\ V_{B} \\ W_{B} \end{bmatrix} = [T_{L2B}] \begin{bmatrix} V_{NR} \\ V_{ER} \\ W_{DR} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

con una magnitud resultante de:

$$V_{RW} = \sqrt{U_B{}^2 + V_B{}^2 + W_B{}^2} = \sqrt{V_{NR}{}^2 + V_{ER}{}^2 + V_{DR}{}^2} \tag{3.13}$$

La cual no se debe de confundir con la magnitud de la velocidad relativa a la Tierra:

$$V_T = \sqrt{V_N{}^2 + V_{EE}{}^2 + V_D{}^2} \tag{3.14}$$

ni con la velocidad sobre Tierra:

$$V_G = \sqrt{V_N{}^2 + V_{EE}{}^2} \tag{3.15}$$

La aceleración en al Marco Cuerpo es la derivada de (3.12), (véase el Apéndice B y (3.25))

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_B \\ \dot{V}_B \\ \dot{W}_B \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -r_T & q_T \\ r_T & 0 & -p_T \\ -q_T & p_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ V_B \\ W_B \end{bmatrix} + [T_{L2B}] \begin{bmatrix} \dot{V}_N - \dot{V}_{TWN} \\ \dot{V}_E - \dot{V}_{TWE} \\ \dot{V}_D - \dot{V}_{TWD} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

En la sección 9.0, se muestra que el modelo de turbulencia solo desarrolla disturbios en el espacio de velocidad, y la derivación de variables aleatorias para obtener términos pseudoaleatorios tales como $(\dot{V}_{TWN}, \dot{V}_{TWE}, \dot{V}_{TWD})$ no es una operación discreta atractiva, Mas aun, el calculo del vector $(\dot{U}_B, \dot{V}_B, \dot{W}_B)$ debe ser un calculo en lazo abierto, excepto:

1. Durante el proceso de ajuste inicial de arranque (trim) (vea la sección 11.0) en el cual todos los componentes aleatorios son necesariamente eliminados.
2. Durante el calculo de a y $\dot{b}$ (3.31) y (3.32), las cuales son variables utilizadas no muy a menudo.

La introducción de la turbulencia en estos términos debe ser dejada a la discreción del usuario, por estas razones se suprimen los elementos aleatorios de (3.16) al utilizar la siguiente aproximación:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_N - \dot{V}_{TWN} \\ \dot{V}_E - \dot{V}_{TWE} \\ \dot{V}_D - \dot{V}_{TWD} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \dot{V}_N - \dot{V}_{NW} \\ \dot{V}_E - \dot{V}_{EW} \\ \dot{V}_D - \dot{V}_{DW} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

la cual incluye solo los términos de aceleración de la “tendencia” del perfil de viento.
Las ecuaciones de diferencias finitas son adecuadas para este calculo.

La ecuación (3.16) se verifica en [ver Ref. 1], nótese que la integración de (3.16) en el marco de referencia Cuerpo (B), el cual puede tener una alta velocidad rotacional, es adecuadamente evitada por (3.7). Este método es básicamente el mismo seguido por L.E. Fogarty y R.M. Howe en una antigua publicación “Analog Computer Solution of the Orbital Flight Equations”.

La tasa de cambio en la longitud sobre una Tierra que gira, es igual a la tasa de cambio debida a la traslación alrededor del eje Z_E, menos la velocidad angular de la Tierra misma. (la derivada de 2.1), de forma tal que (2.13) se puede rescribir como:

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_E \\ V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\dot{l} \\ R\dot{t}_I Cos\, l \\ -\dot{R} \end{bmatrix} + R\dot{w} Cos\, l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Y por comparación con (3.8) se puede obtener que:

$$\begin{bmatrix} \dot{t} \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} V_{EE} / Cos\, l \\ V_N \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

donde “ t ” es la longitud geográfica del vehículo y “ l ” es la latitud geográfica. Una integración directa con las condiciones iniciales apropiadas producirá el vector de posición:

$$\begin{bmatrix} t \\ l \\ h \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{t} \\ \dot{l} \\ \dot{h} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

el cual determina la posición del vehículo con respecto a la superficie de una Tierra esférica que gira. Esta integración puede realizarse con el algoritmo trapezoidal.

Al asumir que el plano X-Z es un plano de simetría del vehículo, La ecuaciones de momentos de Euler [ver Ref. 2] se pueden escribir:

$$\begin{aligned} L_T &= \dot{p}_B I_{XX} + q_B r_B (I_{ZZ} - I_{YY}) - (\dot{r}_B + p_B q_B) I_{XZ} \\ M_T &= \dot{q}_B I_{YY} + p_B r_B (I_{XX} - I_{ZZ}) - (r_B{}^2 - p_B{}^2) I_{XZ} \\ N_T &= \dot{r}_B I_{ZZ} + p_B q_B (I_{YY} - I_{XX}) - (\dot{p}_B - q_B r_B) I_{XZ} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Al resolver simultáneamente este juego de ecuaciones, los pares de aceleraciones angulares se pueden eliminar. La forma resultante de las Ecuaciones Dinámicas de Euler es:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_B \\ \dot{q}_B \\ \dot{r}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_1 r_B + C_2 p_B) q_B \\ C_5 r_B p_B + C_6 (r_B{}^2 - p_B{}^2) \\ (C_8 p_B + C_9 r_B) q_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & 0 & C_4 \\ 0 & C_7 & 0 \\ C_4 & 0 & C_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

En la cual los coeficientes han sido calculados en el siguiente orden:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_7 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{XX} I_{ZZ} - I_{XZ}{}^2)^{-1} \\ C_0 \{(I_{YY} - I_{ZZ}) I_{ZZ} - I_{XZ}{}^2\} \\ C_0 I_{XZ} (I_{XX} - I_{YY} + I_{ZZ}) \\ C_0 I_{ZZ} \\ C_0 I_{XZ} \\ I_{YY}{}^{-1} \\ C_7 (I_{ZZ} - I_{XX}) \\ C_7 I_{XZ} \\ C_0 \{(I_{XX} - I_{YY}) I_{XX} + I_{XZ}{}^2\} \\ C_0 I_{XZ} (I_{YY} - I_{ZZ} - I_{XX}) \\ C_0 I_{XX} \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Los momentos de inercia, y por tanto, estos coeficientes son usualmente designados como constantes para simulaciones en las cuales no se necesite preocuparse de variaciones en tiempo real de masa o de centro de gravedad. Este hecho sin embargo no debe restringirnos a asumir unos ejes principales preseleccionados, o una distribución de masa estacionaria.

Las velocidades angulares en el Marco Cuerpo se obtienes a partir de integrar (3.22) y se puede utilizar un algoritmo Adams-Bashfort de segundo orden.

$$\begin{bmatrix} p_B \\ q_B \\ r_B \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{p}_B \\ \dot{q}_B \\ \dot{r}_B \end{bmatrix} dt \tag{3.24}$$

La rotación del Marco Local, utilizando (2.14), se puede referenciar al Marco Cuerpo a través de la transformación:

$$\begin{bmatrix} p_{LB} \\ q_{LB} \\ r_{LB} \end{bmatrix} = [T_{L2B}] \begin{bmatrix} p_L \\ q_L \\ r_L \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

y las diferencias entre este vector de velocidades angulares y aquel resultante de los torques aplicados en el Marco Cuerpo, producen las diferencias en la orientación de los Marcos Local y de Cuerpo.

$$\begin{bmatrix} p_T \\ q_T \\ r_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_B \\ q_B \\ r_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{LB} \\ q_{LB} \\ r_{LB} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

Esta ecuación es por tanto utilizada para producir las velocidades angulares que luego se utilizan para crear las velocidades angulares de la secuencia de Euler. (vea el Apéndice C)

La secuencia angular de Euler se debe especificar, aquí asumimos que al transformar del Marco Local al Marco Cuerpo la secuencia es, (1) Guiñada Yaw, (2) Ataque (Pitch) y luego (3) el Barreno (Roll).

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{q} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (q_T Sen f + r_T Cos f)/Cos q \\ q_T Cos f - r_T Sen f \\ p_T + \dot{y} Sen f \end{bmatrix} \qquad (3.27)$$

Los ángulos de Euler que relacionan el Marco Cuerpo con el Marco Local, en la secuencia especificada, son calculados a partir del vector anterior, utilizando el algoritmo trapezoidal.

$$\begin{bmatrix} y \\ q \\ f \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{q} \\ \dot{f} \end{bmatrix} dt \qquad (3.28)$$

Para simular las condiciones de vuelo estático, y vuelo en reversa, se pueden utilizar consideraciones de programación especiales. Los ángulos de ataque y de deslizamiento lateral son:

$$a = Tan^{-1}\left[\frac{W_B}{U_B}\right] \qquad \left(-\frac{p}{2} < a < \frac{p}{2}\right) \qquad (3.29)$$

$$b = Tan^{-1}\left\{\frac{V_B}{j\sqrt{U_B^{\;2} + W_B^{\;2}}}\right\} \qquad (p < b < p) \qquad (3.30)$$

en las cuales j es la unidad, con el signo de U_B. Las razones de cambio de estas cantidades son:

$$\dot{a} = \frac{U_B \dot{W}_B - W_B \dot{U}_B}{U_B^{\;2} + W_B^{\;2}} \qquad (3.31)$$

$$\dot{b} = \frac{j}{V_{RW}^{\;2}\sqrt{U_B^{\;2} + W_B^{\;2}}}\left[\left(U_B^{\;2} + W_B^{\;2}\right)\dot{V}_B - V_B\left(U_B \dot{U}_B + W_B \dot{W}_B\right)\right] \qquad (3.32)$$

4.0 Inicialización del vector de velocidad.

El vector de velocidad total con respecto a la superficie de la Tierra puede ser descrito en términos de ángulos de dirección que no tienen absolutamente ninguna relación aerodinámica.

$$\begin{bmatrix} V_N \\ V_{EE} \\ V_D \end{bmatrix} = V_T \begin{bmatrix} Cos g_V Cos g_H \\ Cos g_V Seng_H \\ -Seng_V \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

La incialización de velocidad no es mas que satisfacer simultáneamente las restricciones de (4.1) al respecto de la dirección del vector de velocidad total y la magnitud de la velocidad aerodinámica seleccionada por alguna de las dos siguientes opciones:

$$V_{RW} = \begin{cases} V_o \cdot a & (opcion\, 1) \\ V_o / \left(0.592485\sqrt{r / r_o}\right) & (opcion\, 2) \end{cases} \qquad (4.2)$$

Con la primera opción, V_0 es utilizada como entrada para el numero de Mach, la cual es multiplicada por la velocidad del sonido (a gran altitud). Con la segunda opción V_0 es utilizada para la Velocidad del Aire Equivalente inicial, con la unidades de nudos, combinado el factor de conversión adecuado y la función indicada de relación de densidad atmosférica, también resulta en la velocidad aerodinámica V_{RW}.

La velocidad del aire equivalente es:

$$V_{eq} = 0.592485\, V_{RW} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \qquad (4.3)$$

Debe de hacerse notar que la magnitud de la velocidad aerodinámica es aquella que es especificada sin importar la magnitud o la dirección de algún perfil arbitrario de viento. Además, el procedimiento de inicialización también requiere la especificación de la <u>dirección</u> g_H y g_V del vector de velocidad <u>total.</u>

La inicialización de un vehículo en la Tierra es manejada de forma diferente. La ecuación (4.1) es resuelta directamente asumiendo que la velocidad de carreteo es la entrada V_0 (remplaza a V_T).

5.0 Relación entre el Piloto y el Centro de Gravedad.

La posición y la aceleración de ambas, la estación del piloto y el centro de gravedad son útiles para el control de simuladores de vuelo con movimiento y/o visuales.

Las aceleraciones inerciales del Centro de Gravedad en el Marco Cuerpo, (aquellas que serian medidas por acelerómetros si estos se colocaran allí) se relaciona con las fuerzas aplicadas proporcionalmente:

$$\begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} F_{TX} \\ F_{TY} \\ F_{TZ} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

de forma que las aceleraciones sentidas en la estación del piloto son:

$$\begin{bmatrix} a_{XP} \\ a_{YP} \\ a_{ZP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{bmatrix} + \left\{ \left[\Omega_B\right]^2 + \left[\dot{\Omega}_B\right] \right\} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} + 2\left[\Omega_B\right] \begin{bmatrix} \dot{X}_P \\ \dot{Y}_P \\ \dot{Z}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{X}_P \\ \ddot{Y}_P \\ \ddot{Z}_P \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

donde, como en (2.3) y todas las demás,

$$[\Omega_B] = \begin{bmatrix} 0 & -r_B & q_B \\ -r_B & 0 & -p_B \\ -q_B & p_B & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

El vector de posición $\left(X_P \quad Y_P \quad Z_P\right)$ relaciona la estación del piloto con el centro de gravedad en el Marco Cuerpo, sus derivadas son generalmente iguales a cero.

Al especificar los parámetros longitud t_R, latitud l_R, y altura sobre el nivel del mar h_R de la pista, y una dirección con respecto al norte q_R el radio del centro de la Tierra a la pista queda como:

$$R_R = R_e + h_R \tag{5.4}$$

y el centro de gravedad del vehículo esta localizado al Norte, al Este y sobre la pista de acuerdo a :

$$\begin{bmatrix} \Delta N_R \\ \Delta E_R \\ h_{cg} \end{bmatrix} = R_R \begin{bmatrix} l - l_R \\ (t - t_R) Cos\, l_R \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h - h_R \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

En términos del Marco Pista, el cual se define como aquel cuyo eje X esta a lo largo de la pista, y su eje Y esta a la derecha del origen localizado en la cabecera de la Pista, la posición del centro de gravedad se amplia como:

$$\begin{bmatrix} X_{CG} \\ Y_{CG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cosq_R & Senq_R \\ -Senq_R & Cosq_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_R \\ \Delta E_R \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

La estación del Piloto queda relacionada entonces con la pista por:

$$\begin{bmatrix} \Delta N_{PR} \\ \Delta E_{PR} \\ -H_{PR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta N_R \\ \Delta E_R \\ h_{cg} \end{bmatrix} + \left[T_{L2B} \right]^{-1} \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$\begin{bmatrix} X_{PR} \\ Y_{PR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cosq_R & Senq_R \\ -Senq_R & Cosq_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_{PR} \\ \Delta E_{PR} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Las ecuaciones (5.5) hasta la (5.8) son aproximaciones del tipo “Tierra Plana” las cuales son validas solo en las cercanías de la Pista.

6.0 Cantidades Atmosféricas.

Aquí aparecen algunos ejemplos de propiedades de la atmósfera típicas.

La relación de temperatura total con el numero de Mach es:

$$T_R = 1 + 0.2M^2 \tag{6.1}$$

Si la velocidad es subsónica, la relación de presión total es:

$$P_R = \left(T_R \right)^{\frac{7}{2}} \tag{6.2}$$

pero si es supersónica, entonces queda:

$$P_R = \frac{(166.9)M^2}{\left(7 - M^{-2} \right)^{\frac{5}{2}}} \tag{6.3}$$

Estas dos expresiones son iguales si $M = 1$. Debajo de $h = 36089$ pies, la temperatura ambiente y la relación de presión están dadas por:

$$\begin{aligned} T_{AR} &= 1 - 6.875x10^{-6}h \\ P_{AR} &= T_{AR}\ 5.256 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Por encima de esta altitud queda

$$T_{AR} = 0.751895$$
$$P_{AR} = 0.2234e^{\left[-4.806x10^{-5}(h-36089)\right]} \quad (6.5)$$

La temperatura ambiente (grados C) tiene provisión para una temperatura incremental,y esta dada por:

$$T_A = \Delta T_A + T_{AP}\frac{(518.69)}{(1.8)} \quad (6.6)$$

La presión ambiental es:

$$P_A = (2116.2)P_{AR} \quad (6.7)$$

La temperatura y presion totales estan dadas por:

$$T_T = T_R T_A$$
$$P_T = P_R P_A \quad (6.8)$$

y la presión de impacto es:

$$\bar{q}_C = P_T - P_A \quad (6.9)$$

Es posible utilizar las tablas ARDC de 1962 para la densidad atmosférica r y la velocidad del sonido a, ambas en función de la altura h hasta 240,000 pies, con puntos de datos cada 2000 pies. De forma opcional es posible utilizar también una relación constante.

La densidad atmosférica y la velocidad del sonido se pueden alterar por el efecto de la diferencia de temperatura de la siguiente manera:

$$r = r_{TABLE}\frac{(T_A - \Delta T_A)}{T_A}$$
$$a = a_{TABLE}\sqrt{\frac{T_A}{(T_A - \Delta T_A)}} \quad (6.10)$$

El número de Mach y la presión dinámica quedan como:

$$M = \frac{V_{RW}}{a}$$
$$\bar{q}_C = \frac{1}{2} r (V_{RW})^2 \quad (6.11)$$

y la velocidad del aire calibrada es calculada por medio de :

$$V_C = (0.592485)\, a_0 \sqrt{5\left[\left(1+\frac{\overline{q}_C}{2116.2}\right)^{0.2857} - 1\right]} \qquad (6.12)$$

donde a_0 es la velocidad del sonido al nivel del mar.

7.0 Fuerzas y momentos.

Las cantidades atmosféricas y las otras mostradas con anterioridad son generalmente útiles en los módulos específicos de Motores y Aerodinámicos.
Estos módulos, junto con los de la influencia total del tren de aterrizaje, son luego utilizados para producir las fuerzas totales aplicadas y los momentos utilizados en (3.2) y en (3.21) respectivamente.

La fuerza total, aplicada en el centro de gravedad del vehículo y con todas sus componentes transformadas al Marco Cuerpo, consiste de las contribuciones debidas a la componente aerodinámica, la de los motores y la contribución del tren de aterrizaje. (que se discute en la sección 8.0):

$$\begin{bmatrix} F_{TX} \\ F_{TY} \\ F_{TZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{AZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{EX} \\ F_{EY} \\ F_{EZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{GX} \\ F_{GY} \\ F_{GZ} \end{bmatrix} \qquad (7.1)$$

Las contribuciones a los momentos alrededor del centro de gravedad del vehículo en el Marco Cuerpo se calculan de las mismas fuentes que las fuerzas:

$$\begin{bmatrix} L_T \\ M_T \\ N_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_E \\ M_E \\ N_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_G \\ M_G \\ N_G \end{bmatrix} \qquad (7.2)$$

Esta estructura simplificada esta diseñada solo para aislar modularmente los componentes, especialmente cuando se esta depurando, pudiéndose añadir fácilmente las contribuciones de mas fuerzas y de mas momentos adicionales.

8.0 Tren de Aterrizaje.

Se proporcionan a programas externos los valores de la compresión y de la velocidad de compresión de cada tren de aterrizaje, y se espera que estos programas externos devuelvan a este los valores de la fuerza de amortiguación F_{L_i}, la fuerza de fricción F_{R_i} y la fuerza lateral F_{S_i}. El modelado de estas fuerzas es a discreción del usuario de esta simulación. El modelado normalmente incluye consideraciones de carga estática, amortiguamiento, frenado y dirección.

La altura de una posición seleccionada cerca de la cola de la aeronave se rastrea

$$h_T = h_{CG} + X_T Senq - Z_T Cosq \tag{8.1}$$

para determinar si se ha interceptado la Tierra o no. Si en realidad se ha interceptado a la Tierra, la velocidad vertical de intercepción esta determinada por:

$$\dot{h}_T = \dot{h} + \dot{q}\left(X_T Cosq + Z_T Senq\right) \tag{8.2}$$

Cada tren de aterrizaje es rastreado utilizando varios elementos en la matriz $\left[T_{L2B}\right]$ del Apéndice C

$$h_{G_i} = \frac{\left[h_{CG} - T_{13} X_{G_i} - T_{23} Y_{G_i} - T_{33} Z_{G_i}\right]}{T_{33}} \tag{8.3}$$

Una componente negativa denota que el tren de aterrizaje particular esta sobre la Tierra, su velocidad de compresión se calcula con una ecuación de diferencias, ademas se establece una “bandera” en el programa.

$$N_{G_i} = \begin{cases} 0 & \textit{Tren de aterrizaje no sobre la Tierra} \\ 1 & \textit{Tren de aterrizaje sobre la Tierra} \end{cases} \tag{8.4}$$

para señalizar eventos como luces de aterrizaje, etc.

Con la información anterior el usuario proporciona las fuerzas necesarias para las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_{RX_i} &= F_{R_i} - F_{L_i} q \\ F_{RY_i} &= F_{L_i} f + F_{S_i} \\ F_{RZ_i} &= F_{L_i} + F_{R_i} Senq - F_{S_i} Senf \end{aligned} \tag{8.5}$$

Adicionalmente, a partir de (8.1) y (8.2) se puede desarrollar una fuerza de reacción de cola y una fuerza de fricción de cola
Las contribuciones de los trenes de aterrizaje a los momentos totales, incluyendo el impacto de la cola, son:

$$L_G = \sum \left[F_{RZ_i} Y_{G_i} - F_{RY_i} \left(h_{G_i} + Z_{G_i} \right) \right]$$
$$M_G = -X_T F_{TR} + \sum \left[F_{RX_i} \left(h_{G_i} + Z_{G_i} \right) - F_{RZ_i} X_{G_i} \right] \quad (8.6)$$
$$N_G = \sum \left[F_{RY_i} X_{G_i} - F_{RX_i} Y_{G_i} \right]$$

Las contribuciones a la fuerza total debidas al tren de aterrizaje y a la cola son:

$$\begin{bmatrix} F_{GX} \\ F_{GY} \\ F_{GZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{TF} \\ 0 \\ F_{TR} \end{bmatrix} + \sum \begin{bmatrix} F_{RX_i} \\ F_{RY_i} \\ F_{RZ_i} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

El sufijo i va desde uno hasta tres (o hasta n en caso necesario) para los trenes de aterrizaje de la nariz, derecho e izquierdo respectivamente.

9.0 Turbulencia

10.0 Integración

Las ecuaciones de estado de (3.7), (3.20), (3.23) y (3.27) se pueden integrar numéricamente utilizando el método predictor de Adams-Bashforth de segundo orden, y el algoritmo trapezoidal, los cuales son:

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + \left(3\ddot{y}_n - \ddot{y}_{n-1} \right) \Delta t / 2 \quad (Adams - Bashforth)$$
$$y_{n+1} = y_n + \left(\dot{y}_n - \dot{y}_{n+1} \right) \Delta t / 2 \quad (Trapezoidal) \quad (10.1)$$

Apéndices

Apéndice A

Relaciones entre el Marco Local y de Tierra.
La transformación del Marco Tierra al Marco Local involucra dos rotaciones, en el siguiente orden.

$$\left[T_{E2L}\right]=(1)\,Guiñada\ "t",\ (2)\,Ataque\ "\frac{3p}{2}-l"$$

$$\left[T_{E2L}\right]=\begin{bmatrix} C\left(\frac{3p}{2}-l\right) & 0 & -S\left(\frac{3p}{2}-l\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ S\left(\frac{3p}{2}-l\right) & 0 & C\left(\frac{3p}{2}-l\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ct_I & St_I & 0 \\ -St_I & Ct_I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T_{E2L}\right]=\begin{bmatrix} -Sl & 0 & Cl \\ 0 & 1 & 0 \\ -Cl & 0 & -Sl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Ct_I & St_I & 0 \\ -St_I & Ct_I & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[T_{E2L}\right]=\begin{bmatrix} -Sl\,Ct_I & -Sl\,St_I & Cl \\ -St_I & Ct_I & 0 \\ -Cl\,Ct_I & -Cl\,St_I & -Sl \end{bmatrix}$$

Cuando “barrena” se define como una rotación sobre el eje X, “baile” se define como una rotación sobre el eje Y, y una “guiñada” se define como una rotación sobre el eje Z

La derivada de $\left[T_{E2L}\right]$ anterior es:

$$\left[\dot{T}_{E2L}\right]=\begin{bmatrix} -Cl\,Ct_I\,\dot{l}+Sl\,St_I\dot{t}_I & -Cl\,St_I\,\dot{l}-Sl\,Ct_I\dot{t}_I & -Sl\,\dot{l} \\ -Ct_I\dot{t}_I & -St_I\dot{t}_I & 0 \\ Sl\,Ct_I\,\dot{l}+Cl\,St_I\dot{t}_I & Sl\,St_I\,\dot{l}-Cl\,Ct_I\dot{t}_I & -Cl\,\dot{l} \end{bmatrix}$$

y a partir de la ecuación (2.4) tenemos que :

$$\left[\dot{T}_{E2L}\right]=\begin{bmatrix} -r_L St_I + q_L C\,l\,Ct_I & -r_L Ct_I + q_L C\,l\,St_I & q_L S\,l \\ r_L S\,l\,Ct_I - p_L C\,l\,Ct_I & r_L S\,l\,St_I - p_L C\,l\,St_I & -r_L C\,l - p_L S\,l \\ -q_L S\,l\,Ct_I + p_L St_I & -q_L S\,l\,St_I - p_L Ct_I & q_L C\,l \end{bmatrix}$$

por examen de los elementos tenemos que :

$$\begin{bmatrix} p_L \\ q_L \\ r_L \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{t}_I Cos\,l \\ -\dot{l} \\ -\dot{t}_I Sen\,l \end{bmatrix}$$

Apéndice B

Operaciones matriciales.

El producto cruz vectorial $\overline{w}\times\overline{v}$ tiene una forma equivalente en notación matricial, la cual puede ser expresada por $[\Omega]\overline{v}$ Para demostrar esto, tomemos dos vectores con la misma base $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\hat{i}w_X+\hat{j}w_Y+\hat{k}w_Z\\ \overline{v}&=\hat{i}v_X+\hat{j}v_Y+\hat{k}v_Z\end{aligned} \tag{B-1}$$

y realizemos las operaciones indicadas:

$$\overline{u}=\overline{w}\times\overline{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ w_X&w_Y&w_Z\\ v_X&v_Y&v_Z\end{vmatrix}$$

$$\overline{u}=\hat{i}\left(w_Yv_Z-w_Zv_Y\right)+\hat{j}\left(w_Zv_X-w_Xv_Z\right)+\hat{k}\left(w_Xv_Y-w_Yv_X\right) \tag{B-2}$$

$$\overline{u}=\begin{bmatrix}w_Yv_Z-w_Zv_Y\\ w_Zv_X-w_Xv_Z\\ w_Xv_Y-w_Yv_X\end{bmatrix}=[\Omega_W]\begin{bmatrix}v_X\\ v_Y\\ v_Z\end{bmatrix}$$

Por inspección de cada término, el operador Omega cruz (expresado en elementos del primer vector en el producto cruzado) debe ser la siguiente matriz simétrica :

$$[\Omega_W]=\begin{bmatrix}0&-w_Z&w_Y\\ w_Z&0&-w_X\\ -w_Y&w_X&0\end{bmatrix} \tag{B-3}$$

O si se utilizan los elementos del segundo vector :

$$\overline{u}=[\Omega_V]\begin{bmatrix}v_X\\ v_Y\\ v_Z\end{bmatrix} \tag{B-4}$$

donde de nuevo, por inspección se tiene:

$$[\Omega_V] = \begin{bmatrix} 0 & v_Z & -v_Y \\ -v_Z & 0 & v_X \\ v_Y & -v_X & 0 \end{bmatrix} \tag{B-5}$$

Note el cambio de signo de los elementos cuando se utiliza el ultimo vector.

La transpuesta de (B-2), por ejemplo, muestra que un post-operador también se puede utilizar.

$$\bar{u}' = [u_X \quad u_Y \quad u_Z] = \left([\Omega]\bar{v}\right)' = \bar{v}'[\Omega]'$$

$$\bar{u}' = -\bar{v}'[\Omega] = -[V_X \quad V_Y \quad V_Z]\begin{bmatrix} 0 & -w_Z & w_Y \\ w_Z & 0 & -w_X \\ -w_Y & w_X & 0 \end{bmatrix} \tag{B-6}$$

Considere algun vector $\bar{v}$ en algun sistema coordenado ortonormal arbitrarioque sufre rotaciones simultaneas alrededor de los tres ejes. Sea p la velocidad rotacional instantánea alrededor del eje X, q y r sean cantidades similares definidas con respecto a los ejes Y y Z. Definamos el vector $w = (p, q, r)$

Considere primero una rotación alrededor del eje X (barrena) a lo largo de un anguo f . Las coordenadas vectoriales de algún punto P cambia a Q debido a la rotación.

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= yCosf + zSenf \\ z' &= zCosf - ySenf \end{aligned} \tag{B-7}$$

o si $f = p\Delta t$ cuando Δt es un tiempo infinitesimal

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + zp\Delta t \\ z' &= z - yp\Delta t \end{aligned} \tag{B-8}$$

De igual forma una rotación alrededor del eje Y (baile) en un tiempo Δt queda como:

$$\begin{aligned} x' &= x - zq\Delta t \\ y' &= y \\ z' &= z + xq\Delta t \end{aligned} \tag{B-9}$$

Y una rotación alrededor del eje Z (guiño) en un tiempo Δt nos da:

$$
\begin{aligned}
x' &= x + yr\Delta t \\
y' &= y - xr\Delta t \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{B-10}
$$

Si realizamos simultáneamente las tres rotaciones, y tomamos nota de que los terminos no conmutativos son de segundo orden con respecto a Δt, veremos que :

$$
\begin{aligned}
x' &= x + \left(yr - zq\right)\Delta t \\
y' &= y + \left(zp - xr\right)\Delta t \\
z' &= z + \left(xq - yp\right)\Delta t
\end{aligned}
\tag{B-11}
$$

o de otra forma:

$$
\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
\tag{B-12}
$$

De aquí, la taza de cambio (o la derivada) de un vector que solo sufre rotaciones, (no cambio de tamaño) puede ser descrita por el producto cruz de (B-3), donde $\overline{w}$ representa las velocidades angulares instantáneas de los ejes sufriendo la rotación.
A partir de una sencilla partición de vectores:

$$
\begin{bmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} & \dot{a}_{13} \\ \dot{a}_{21} & \dot{a}_{22} & \dot{a}_{23} \\ \dot{a}_{31} & \dot{a}_{32} & \dot{a}_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
\tag{B-13}
$$

siempre que la longitud de cada columna sea preservada. Esto es cierto para cualquier matriz ortogonal, esto es, la transformada del punto P al punto Q de forma que :

$$
\dot{T}_{PQ} = -\left[\Omega_Q\right]T_{PQ}
\tag{B-14}
$$

Apendice C
Relaciones entre los Marcos Local y de Cuerpo.

La secuencia rotacional al transformar del Marco Local al Marco Cuerpo esta determinada por:

$$[T_{L2B}] = (1) Guiñada "y", \ (2) Baile "q", \ (3) Barrena "f"$$

$$[T_{L2B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cf & Sf \\ 0 & -Sf & Cf \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cq & 0 & -Sq \\ 0 & 1 & 0 \\ Sq & 0 & Cq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Cy & Sy & 0 \\ -Sy & Cy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{C-1}$$

$$[T_{L2B}] = \begin{bmatrix} CqCy & CqSy & -Sq \\ SfSqCy - CfSy & SfSqSy + CfCy & SfCq \\ CfSqCy + SfSy & CfSqCy - SfCy & CfCq \end{bmatrix}$$

A partir de (2.4) y (3.26) esta transformacion esta relacionada a su razon de cambio de la siguiente forma:

$$[\dot{T}_{L2B}] = -[\Omega_T][T_{L2B}] \tag{C-2}$$

la cual puede ser expandida (eliminando los sufijos superfluos):

$$\begin{bmatrix} \dot{T}_{11} & \dot{T}_{12} & \dot{T}_{13} \\ \dot{T}_{21} & \dot{T}_{22} & \dot{T}_{23} \\ \dot{T}_{31} & \dot{T}_{32} & \dot{T}_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & r_T & -q_T \\ -r_T & 0 & p_T \\ q_T & -p_T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \tag{C-3}$$

Si se seleccionan solo tres de estas nueve relaciones, y se igualan a la derivada de (C-1) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{T}_{11} &= -\dot{q}SqCy - \dot{y}CqSy \\ \dot{T}_{11} &= r_T T_{21} - q_T T_{31} \\ \dot{T}_{11} &= r_T (SfSqCy - CqSy) - q_T (CfSqCy + SfSy) \end{aligned} \tag{C-4}$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_{13} &= -\dot{q}Cq \\ \dot{T}_{13} &= r_T T_{23} - q_T T_{33} \\ \dot{T}_{13} &= r_T SfCq - q_T CfCq \end{aligned} \tag{C-5}$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_{33} &= -\dot{f}SfCq - \dot{q}CfSq \\ \dot{T}_{33} &= q_T T_{13} - p_T T_{23} \\ \dot{T}_{33} &= -q_T Sq - p_T SfCq \end{aligned} \tag{C-6}$$

Estas tres ecuaciones, al resolverse simultaneamente producen la ecuacion (3.27).

La seleccion de una secuencia de rotacion de Euler distinta, producira una forma diferente de esta ecuacion de velocidad angular.